الدالة الدورية:-تعرف الدالة f على انها دالة دورية أذا كانت $f(x+p)=f(x)$ بحيث ان $p>0, \forall x \in D_f$.

ملاحظة:-تستخدم وحدة القياس النصف قطري (Radian) أو وحدة الدرجات(Degree) لقياس الزاوية والعلاقة بينهما هي($\pi = 180^{\circ}$).

انواع الدوال:-

هنالك نوعين أساسيين من الدوال وهي:-

أ- **الدوال الجبرية:-**وهي الدوال التي تعرف بأستخدام متعددات الحدود وكذلك ممكن اجراء العمليات الجبرية عليها. ومنها(الدالة الثابتة، الدالة الخطية، الدالة التربيعية، الدالة الكسرية).

تعريف:- يقال للدالة انها **دالة متعددة حدود** من الدرجة n اذا كان بالامكان كتابتها بالصيغة التالية.

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

حيث أن n عدد صحيح غير سالب والمعاملات $a_n, \ldots, a_1, a_0$ هي اعداد حقيقية.

مثال10:- $f(x)=3x^5-4x^3+x^2+x-\frac{1}{3}$ والتي تتفق مع التعريف اعلاه هي متعددة حدود وان

$a_5=3, a_4=0, a_3=-4, a_2=1, a_2=1, a_1=1, a_0=-\frac{1}{3}$ وهي متعددة حدود من الدرجة الخامسة.

ومن الدوال الجبرية:-

1. **الدالة الثابتة:-** تعرف الدالة f على انها ثابتة اذا كانت عدد حقيقي ثابت لكل قيم x.

$$f(x)=c, \ \forall x \in R$$

خواص الدالة الثابتة

- **$D_f = R$ معرفة لكل الاعداد الحقيقية**
- **$D_f = \{a\}$ المدى هو قيمة واحدة فقط.**
- **$f(x)=f(-x)$ دالة زوجية.**
- **تمثل بخط مستقيم يقطع محور y ويوازي محور x.**

مثال11:- $f(x) = 1, \forall x \in R$

مثال12:- $f(x) = 3, \forall x \in R$ اي ان الدالة f تبقى ثابتة لكل قيم x.

2. **الدالة الخطية:-** نقول على الدالة f على انها خطية اذا كانت متعددة حدود من الدرجة الاولى.

$$f: R \longrightarrow R, \;\; f(x) = ax + b, \;\; \forall x \in R, \;\; a, b \in R, \;\; a \neq 0$$

حيث ان $f(x)$ يمثل المتغير المعتمد و x يمثل المتغير المستقل و a,b ثوابت الدالة الخطية.

خواص الدالة الخطية

- $\boldsymbol{D_f = R}$ **معرفة لكل الاعداد الحقيقية.**
- $\boldsymbol{R_f = R}$ **اذا كانت** $\boldsymbol{a \neq 0}$.
- **فردية.**

مثال13- $f(x) = 2x, \forall x \in R$

مثال14- $f(x) = x + 3, \forall x \in R$

3. **الدالة التربيعية:-** نقول على الدالة f على انها تربيعة اذا كانت متعددة حدود من الدرجة الثانية.

حيث ان $f(x)$ يمثل المتغير المعتمد و x يمثل المتغير المستقل و a,b,c ثوابت الدالة التربيعية.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; \forall x \in R, \;\; a, b, c \in R, \;\; a \neq 0$$

خواص الدالة التربيعية

- $\boldsymbol{D_f = R}$ **معرفة لكل الاعداد الحقيقية.**
- $\boldsymbol{R_f \neq R}$.
- **تكون الدالة زوجية اذا كانت b,c=0.**

مثال15:- $f(x) = x^2, \forall x \in R$

مثال16:- $f(x) = 2x^2 - 5x + 6, \forall x \in R$

4. **الدالة الكسرية:-** نقول على الدالة f على انها كسرية أو نسبية اذا كانت على شكل كسر بسطه ومقامه متعددة حدود.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0},\ \forall x\in R, Q(x)\neq 0$$

خواص الدالة الكسرية

- **المجال D_f للدالة الكسرية هو جميع قيم R التي لاتجعل المقام مساويا الى الصفر.**
- **ليست فردية ولا زوجية.**

مثال17:- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}, \forall x\in R\backslash\{1\}$

مثال18:- اذا كانت $P(x)=2x^2+x-1$ و $Q(x)=x+2$ حيث ان $x\neq -2$ فان

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x^2+x-1}{x+2}$ هي دالة نسبية

مثال19:- اذا كانت $P(x)=3x^2-5x+6$ و $Q(x)=1$ حيث فان

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=3x^2-5x+6$ هي دالة نسبية.

تعريف:- الدالة المعرفة بتعبير مركب من متعددة الحدود بعمليات متكررة من جمع وطرح وضرب وقسمة وبأخذ الجذور هي ايضا دالة جبرية.

مثال20:- الدالة التالية

$f(x)=13x^8+(x^2+15)^{3/2}-\left[\frac{x-\sqrt{7x}-1}{(2x+1)\sqrt{8-x}}\right]$ هي دالة جبرية

وعليه فأن كل دالة متعددة حدود وكل دالة نسبية هي ايضا دالة جبرية.

تعريف:- الميل a للخط المستقيم المار بين النقطتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ يعرف بـ.

$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ بشرط ان يكون $x_1\neq x_2$ اي انه لايكون المستقيم عموديا.

مثال21:- أوجد ميل خط المستقيم المار بالنقطتين $(3,-2),(-5,6)$

الحل:-

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a=\frac{6-(-2)}{-5-3}=-1$$

مثال22:- أوجد معادلة خط المستقيم الذي ميله 6 ويم بالنقطة $(4,-8)$

الحل:-

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Longrightarrow 6=\frac{y-(-8)}{x-4}\Longrightarrow y+8=6x-24\Longrightarrow y=6x-32$$

مثال23:- ماذا تعني اقتصاديا الحدود a و b في المعادلة الخطية $y=ax+b$.

الحل:- a تعني الكلفة. b تعني الكلفة الثابتة.

ب- **الدوال الغير جبرية:-** وهي دوال خاصة مثل الدوال المثلثية، الدوال الاسية، الدوال اللوغارتمية.

<u>الدوال المثلثية</u>

اذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكانت x احدى زاويتيه الغير قائمتين فأن هنالك دوال تسمى الدوال المثلثية تعرف على هذه الزاوية:

1. دالة الجيب(sin function) وهي الدالة الناتجة من قسمة طول الضلع المقابل لزاوية x على طول الوتر بحيث أن:-

$$f(x)=\sin x$$

خواص دالة الجيب

- $D_f=R$ **معرفة لكل قيم R.**
- $R_f=[-1,1]$,
- **دالة فردية.**
- **دالة دورية ذات دورة 2π**

2. دالة الجيب تمام(cos function) وهي الدالة الناتجة من قسمة طول الضلع المجاور لزاوية x على طول الوتر بحيث أن:-

$$f(x)=\cos x$$

خواص دالة الجيب تمام

- **$D_f = R$ معرفة لكل قيم R.**
- $R_f = [-1, 1]$,
- **دالة زوجية.**
- **دالة دورية ذات دورة 2π**

3. دالة الظل(tan function) وهي الدالة الناتجة من قسمة طول الضلع المقابل لزاوية x على طول الضلع المجاور لزاوية x بحيث أن:-

$$f(x) = \tan x$$

خواص دالة الظل

- **ليست معرفة لكل الاعداد الحقيقية.**
- $R_f = R$,
- **دالة دورية ذات دورة π**
- **فردية**

4. دالة الظل تمام(cot function) وهي الدالة الناتجة من قسمة طول الضلع المجاور لزاوية x على طول الضلع المقابل لزاوية x .

$$f(x) = \cot x$$

خواص دالة الظل تمام

- **ليست معرفة لكل الاعداد الحقيقية.**
- $R_f = R$,
- **دالة دورية ذات دورة π**
- **فردية**

5. دالة القاطع(sec function) وهي الدالة الناتجة من قسمة طول الوترعلى طول الضلع المجاور لزاوية x أو مقلوب دالة الجيب تمام.

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

خواص دالة القاطع

- **ليست معرفة لكل الاعداد الحقيقية.**
- $R_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- **دالة دورية ذات دورة 2π**
- **زوجية**

6. دالة القاطع تمام(csc function) وهي الدالة الناتجة من قسمة طول الوتر على طول الضلع المقابل لزاوية x أو مقلوب دالة الجيب.

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

خواص دالة القاطع تمام

- **ليست معرفة لكل الاعداد الحقيقية.**
- $\boldsymbol{R_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)}$
- **دالة دورية ذات دورة $\boldsymbol{2\pi}$**
- **فردية**

الدوال الاسية

تستخدم هذه الدوال كثيرا في القوانين وكذلك لتمثيل عمليات كبيرة جدا ويعود اكتشافها للعالم الخوارزمي حيث انه اكتشف هذا النوع من الدوال ويذكر ان اول استخدام لها ظهر في بداية القرن التاسع الميلادي

قوانين الاسس

ليكن x عدد حقيقي و m,n أعداد طبيعية

1. $x^n = x \times x \times x \times \ldots \times x$

يقرأ x اس n أو x مرفوع للقوة n.

مثال:-احسب كل مما يلي:-

1) $2^7 = 2 \times 2^6 = 2 \times 64 = 128$
2) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

2. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

مثال 24:-

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{-2\times-2\times-2\times-2} = \frac{1}{16}$$

3. $(x^n)^m = x^{nm}$

مثال 25:-

$$(x^2)^3 = x^{2\times3} = x^6 = 64 \text{ where } x=2$$

4. $(xy)^n = x^n y^n$

مثال 26:-

$$(xy)^3 = x^3 y^3$$

4. $x^n x^m = x^{n+m}$

مثال 27:-

$$7^2 7^3 = 7^{2+3} = 7^5 = 16807$$

5. $\frac{x^n}{x^m} = x^n x^{-m} = x^{n-m}$

مثال 28:-

$$\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

<u>قوانين الجذور:-</u>

1. $\sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

مثال 29:-

$$\sqrt{5}\ \sqrt{6} = \sqrt{30}$$

2. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

مثال 30:-

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\frac{9}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

3. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

مثال 31:-

$$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^{3} = 2^{3} = 8$$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nn]{x}$

مثال 32:-

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16}$$

5. $\sqrt[n]{x^{n}} = \begin{cases} x & \text{فردي } n \\ |x| & \text{زوجي } n \end{cases}$

مثال 33:-

$\sqrt{7^2}$=7

ملاحظات:-

1. يسمى $\sqrt[n]{x}$ الجذر النوني لـ x.
2. لايمكن حساب جذر من درجة زوجية لاعداد سالبة بأستخدام الاعداد الحقيقية.

1. الدالة الاسية

تعرف الدالة

$$y = f(x) = b^{x}$$

بحيث ان b عدد *حقيقي موجب لايساوي 1 بانه اساس* الدالة الاسية.

ملاحظة:-تكون دالة الاساس الطبيعي $y = e^{x}$ حالة خاصة من الدوال الاسية ، حيث ان $e \cong 1.71828$.

خواص الدوال الاسية:-

a) معرفة لجميع الاعداد الجقيقية.
b) $R_f = R^{+}$.
c) ليست فردية ولا زوجية.
d) ترسم بتحديد قيمة الاساس b.

مثال 34:--حدد اساس كل من الدوال التالية.

1) $y = \pi^{2x}$
2) $y = 5^{-x}$
3) $y = 6^{\frac{x}{2}}$

الحل:

1) $y = \pi^{2x} = (\pi^2)^x$

الاساس هو π^2 .

2) $y = 5^{-x} = \frac{1}{5^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

الاساس هو $\frac{1}{5}$.

3) $y = 6^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{6}\right)^x$

الاساس هو $\sqrt{6}$.

مثال 35:--بسط المقادير الاتية.

1) $\frac{5^{-x+2}\,25^x}{125^{3+x}}$
2) $\frac{(36^{\frac{1}{2}})^x}{6^x}$

الحل:

1) $\frac{5^{-x+2}\,25^x}{12\ \ ^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\,(5^2)^x}{(5^3)^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\,5^{2x}}{5^{9+3x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{9+3x}} = 5^{-2x-7} =$
$\frac{1}{5^{2x+7}} = \frac{1}{5^7 5^{2x}} = \frac{1}{5^7}\left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \frac{1}{78125}\left(\frac{1}{25}\right)^x$

2) $\frac{(36^{\frac{1}{2}})^x}{6^x} = \frac{\left(\sqrt{36}\right)^x}{6^x} = \frac{6^x}{6^x} = \left(\frac{6}{6}\right)^x = 1^x = 1.$

نظرية:- اذا كانت x و y أعداد حقيقية موجبة فأن:-

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ (1